STRUMENTI PER ECONOMIA POLITICA

ELEMENTI DI MATEMATICA PER L'ECONOMIA

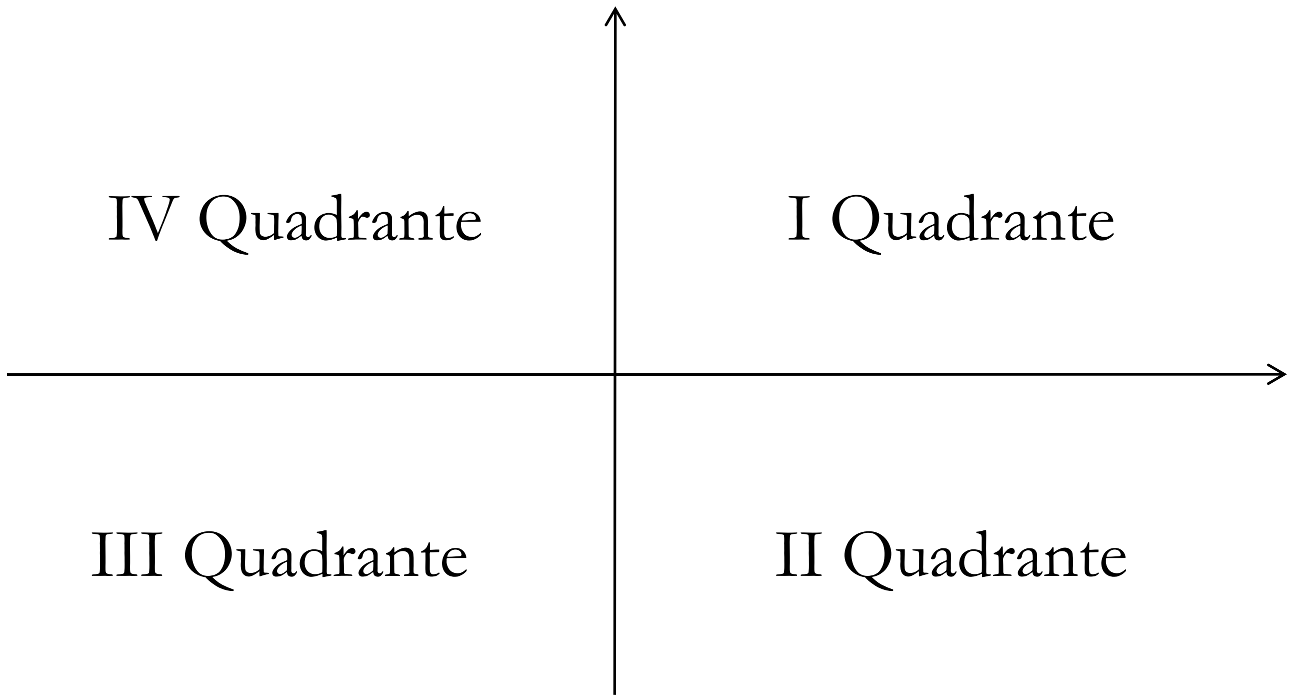
Slide concesse dalla dott.ssa Giua L.

1. ELEMENTI DI MATEMATICA PER L'ECONOMIA

Argomenti:

- Il piano cartesiano
- La retta
  - Pendenza e intercetta
  - Rappresentazione grafica
- I sistemi
- Le derivate
  - Le derivate prime
  - Le derivate parziali
  - Le derivate seconde

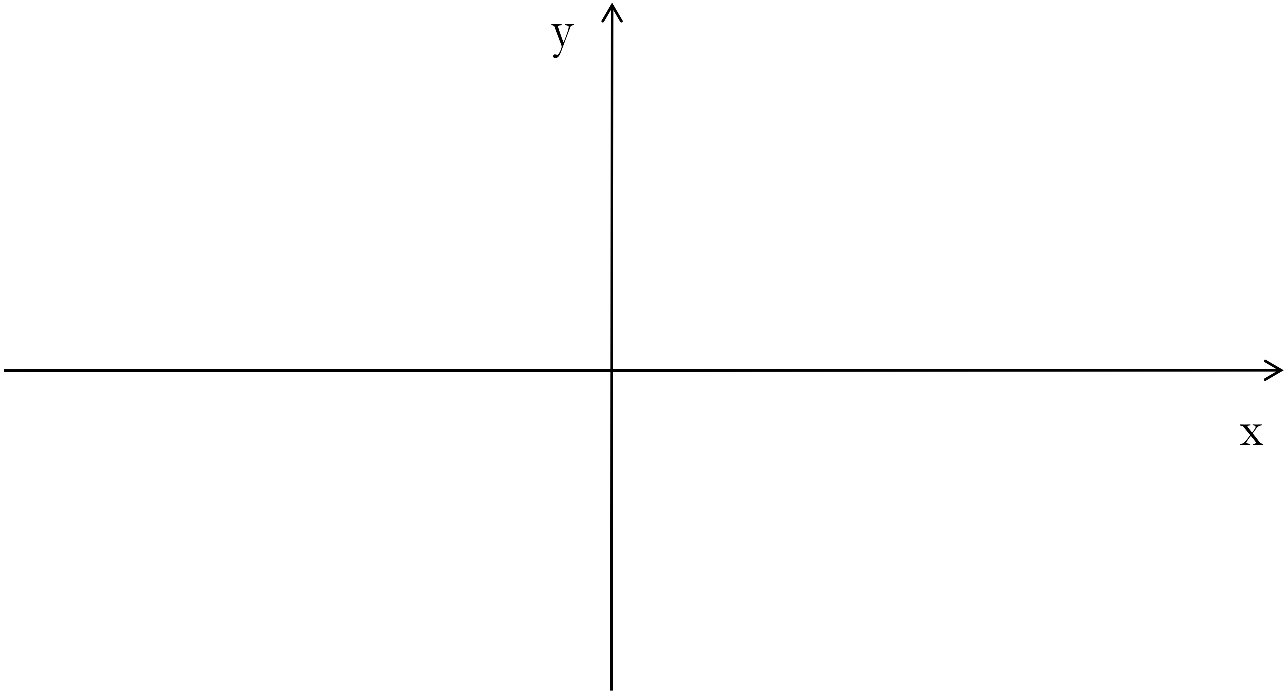
IL PIANO CARTESIANO



Il piano cartesiano è definito da due assi perpendicolari tra loro, l'**asse delle ascisse** e l'**asse delle ordinate**, che lo dividono in 4 quadranti.

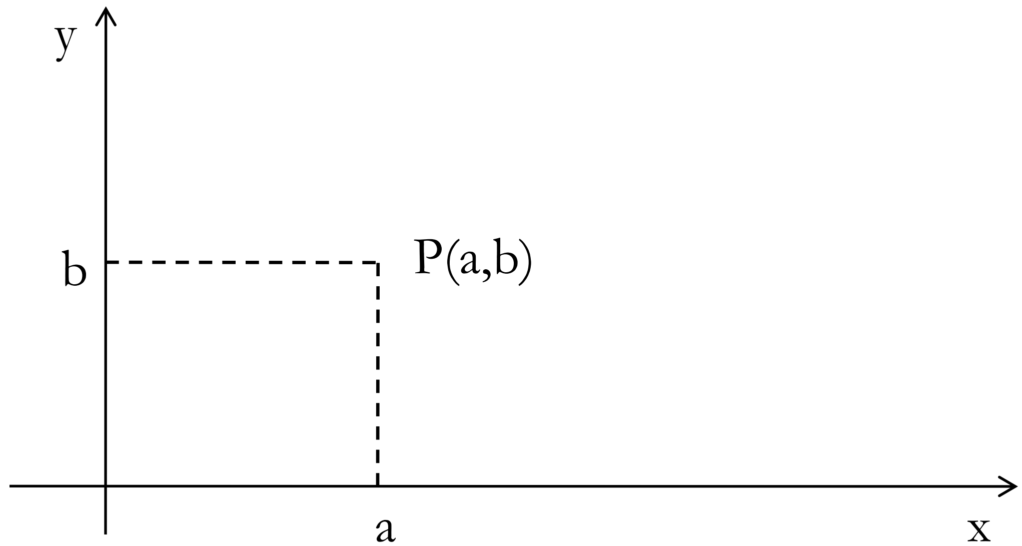
In economia generalmente si utilizza solo il I quadrante.

IL PIANO CARTESIANO



Sull'asse delle ascisse viene di solito rappresentata la variabile indipendente (x) e sull'asse delle ordinate la variabile dipendente (y).

IL PIANO CARTESIANO



Ogni punto è definito dalle sue coordinate, cioè da una coppia ordinata di numeri, ad esempio *a* e *b*, che si indica con (*a* , *b*).

LE FUNZIONI

Sul piano cartesiano si possono rappresentare le funzioni ad una sola variabile dipendente.

Una **funzione** è una relazione che lega due variabili secondo una determinata regola.

In generale si scrive:

$$y = f(x)$$

x è la variabile indipendente;
y è la variabile dipendente;
$f(\ )$ è la relazione che lega le due variabili.

Si possono ovviamente utilizzare altre lettere o simboli, ad es:
$z = g\ (x)$

LA RETTA

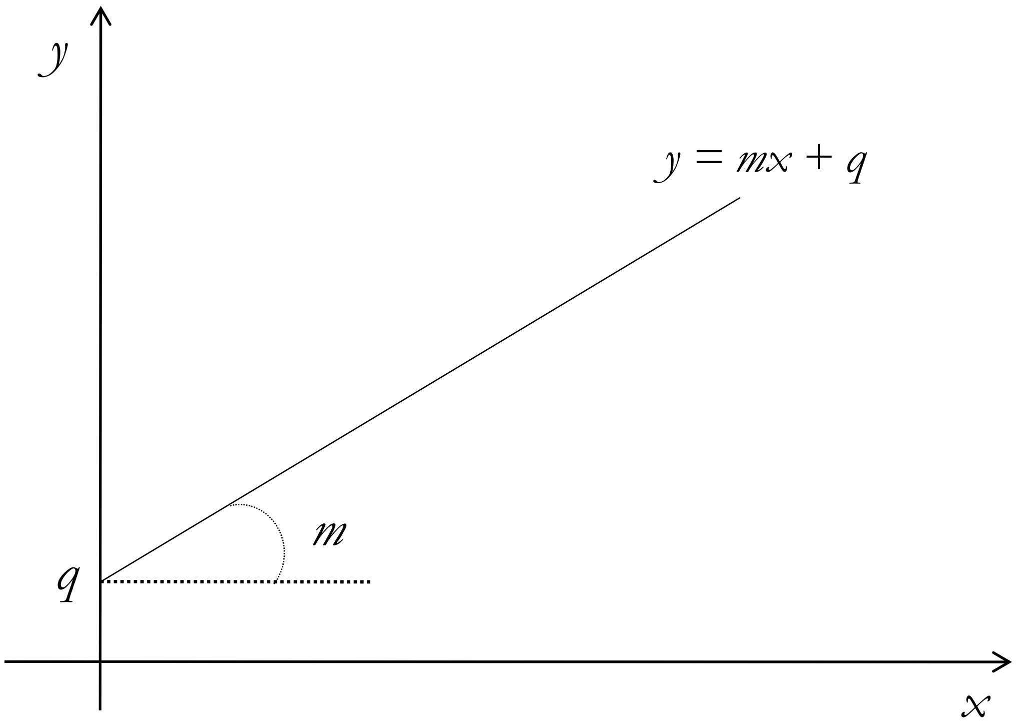
La retta è la funzione più semplice.

Di solito l'equazione della retta si scrive in **forma esplicita**:

$$y = mx + q$$

dove
m è il coefficiente angolare (pendenza)
q è l'intercetta con l'asse delle ordinate

LA RETTA



q = intercetta
m = coefficiente angolare

LA RETTA

L'equazione della retta si può anche scrivere in **forma implicita**:

$$ax + by + c = 0$$

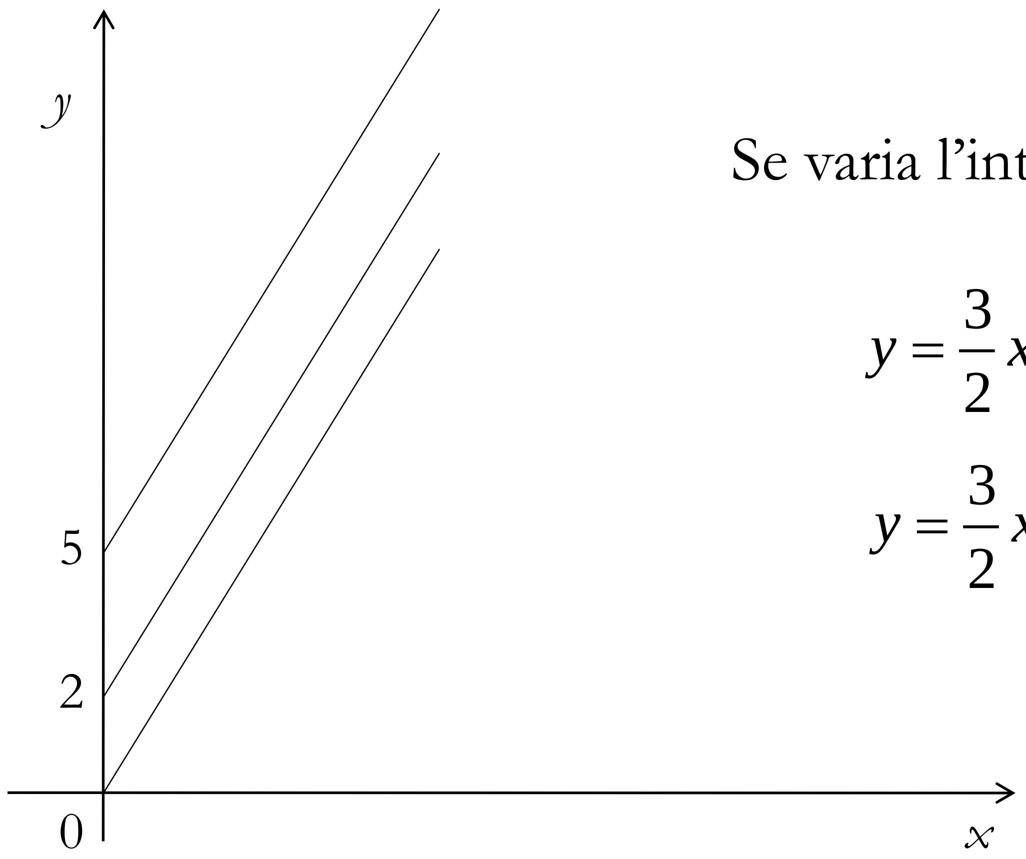
dove
a è il coefficiente della x
b è il coefficiente della y
c è il termine noto

Posta in questa forma la retta ci permette di trovare facilmente le intercette con gli assi ponendo la x o la y uguali a zero.

LA RETTA

Esempio (pendenza positiva):

$$y = \frac{3}{2}x + 2$$



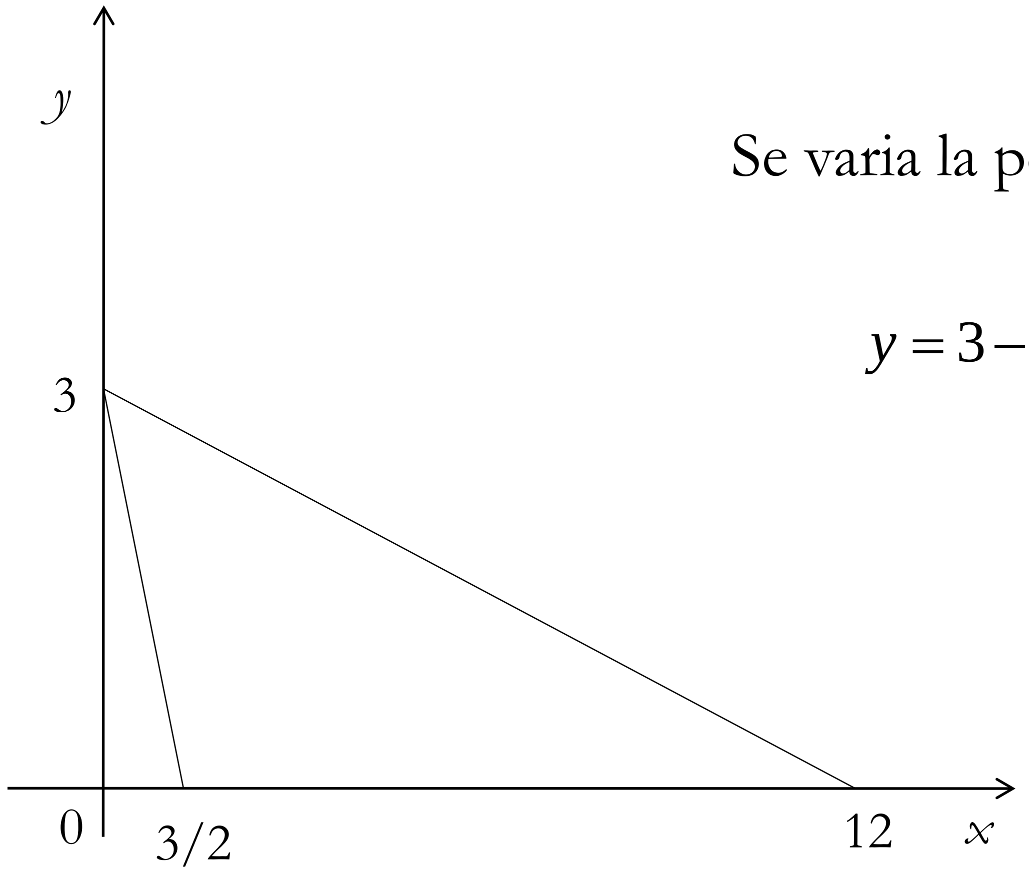
Se varia l'intercetta:

$$y = \frac{3}{2}x + 5$$

$$y = \frac{3}{2}x$$

LA RETTA

Esempio (pendenza negativa): $y = 3 - 2x$



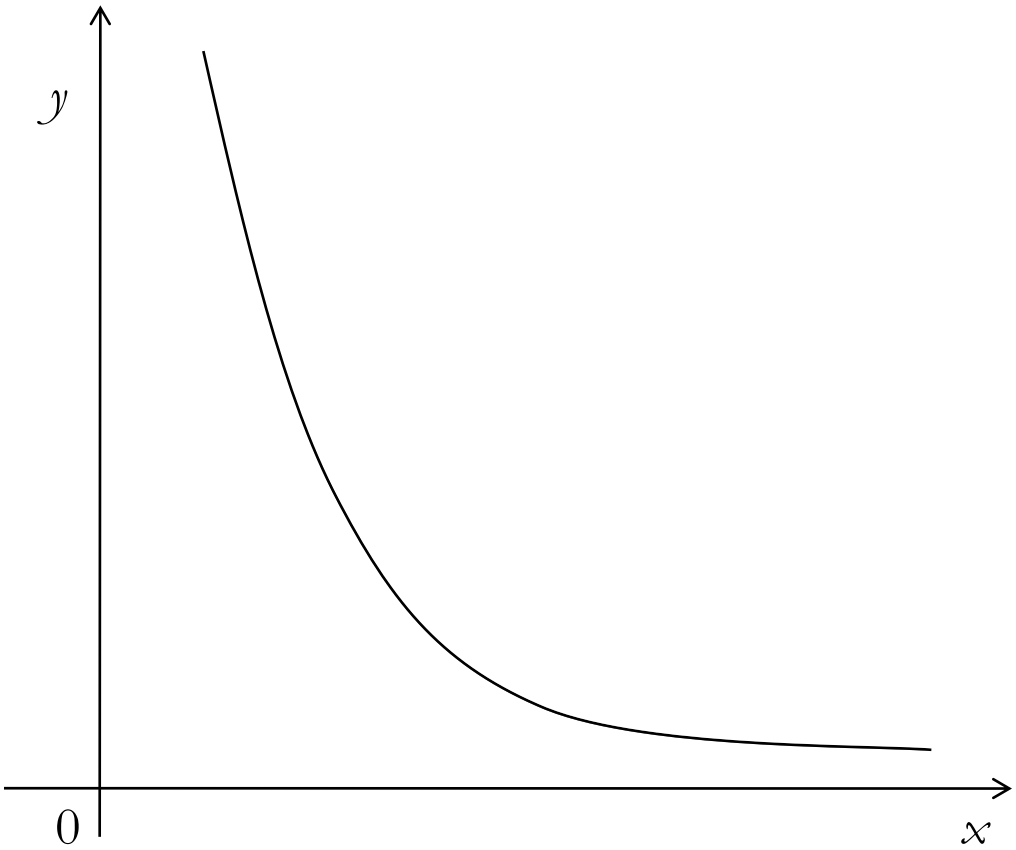
Se varia la pendenza:

$$y = 3 - \frac{1}{4}x$$

ALTRI TIPI DI FUNZIONE: L'IPERBOLE

Esempio:

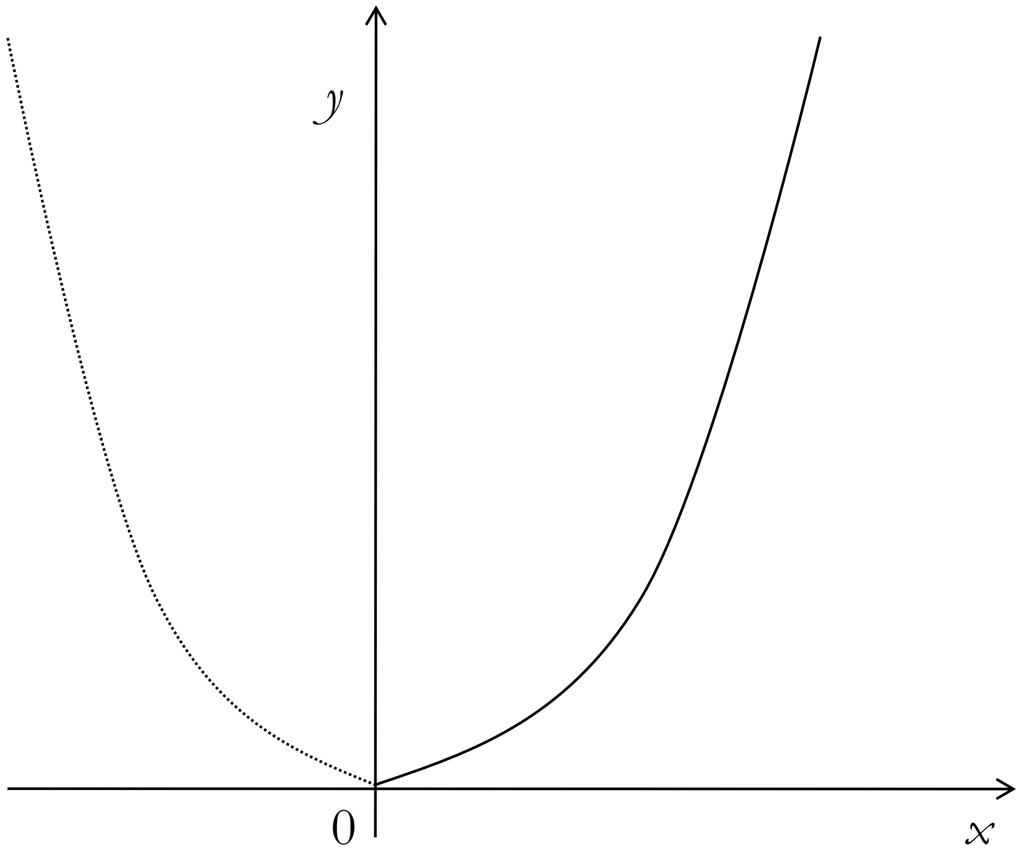
$$y = \frac{8}{x}$$



ALTRI TIPI DI FUNZIONE: LA PARABOLA

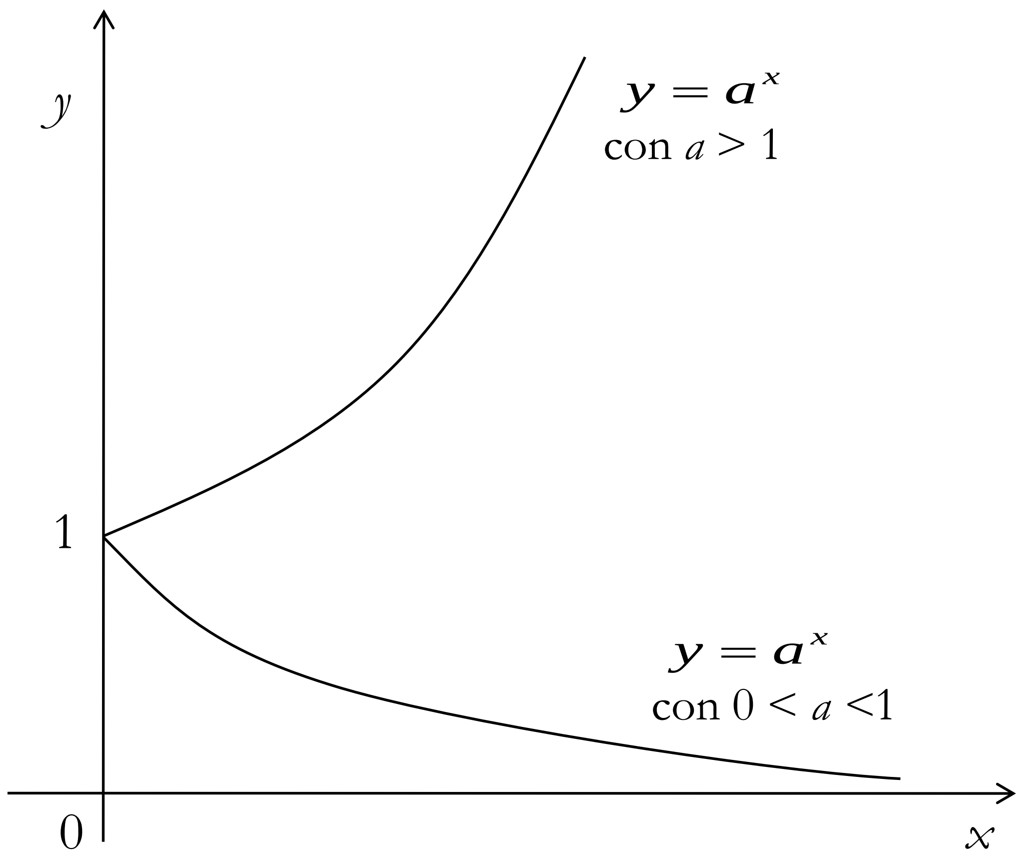
Esempio:

$$y = x^2$$



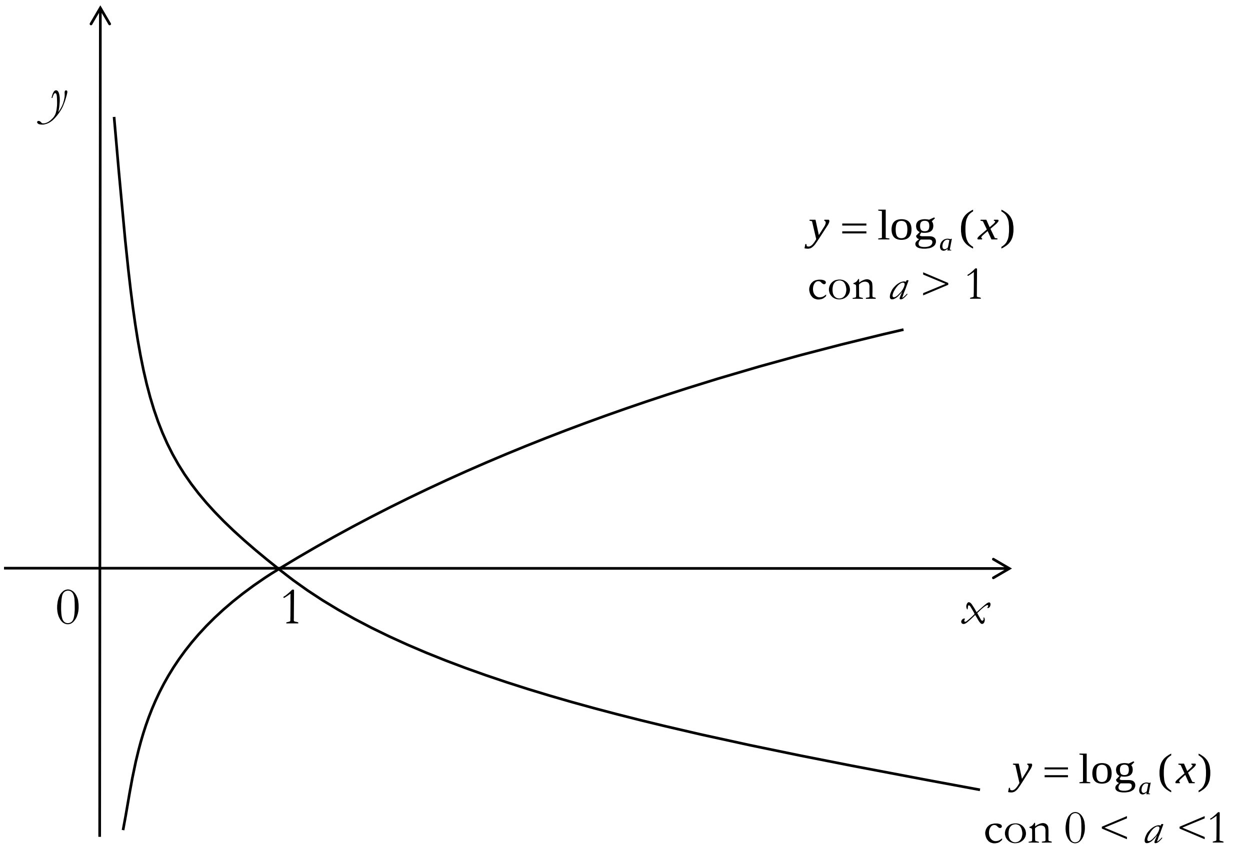
ALTRI TIPI DI FUNZIONE: L'ESPONENZIALE

Esempio: $y = a^x$



ALTRI TIPI DI FUNZIONE: LA LOGARITMICA

Esempio: $$y = \log_a(x)$$



ESERCIZIO 1

Rappresentare graficamente le seguenti funzioni e dire se tali funzioni sono costanti, crescenti o decrescenti:

a. $y = 6x + 10$

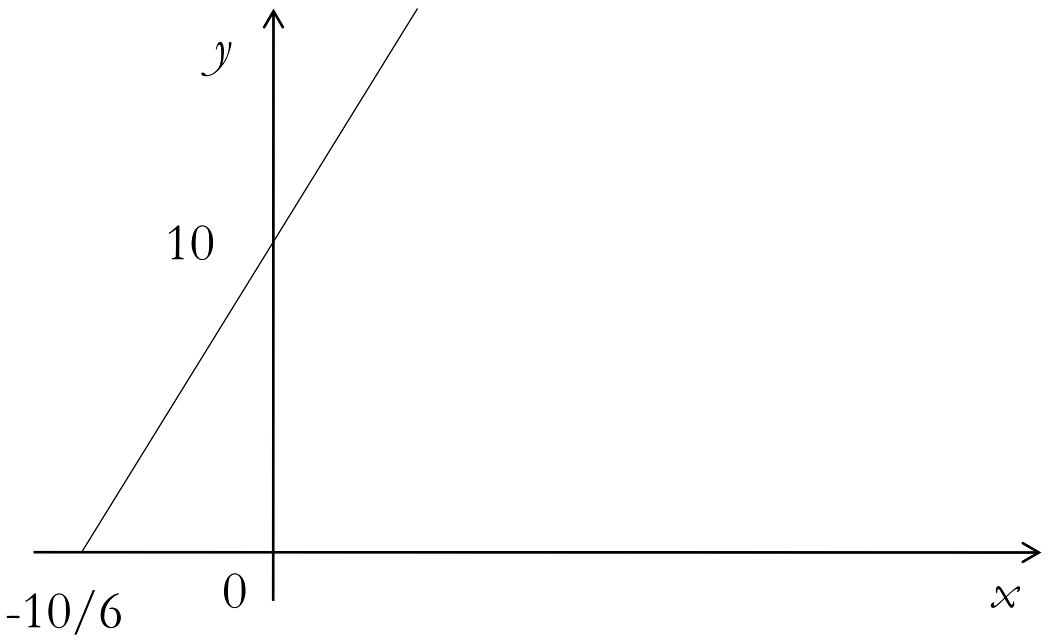
b. $3x + 3y - 9 = 0$

c. $x = 20$

d. $y = 2$

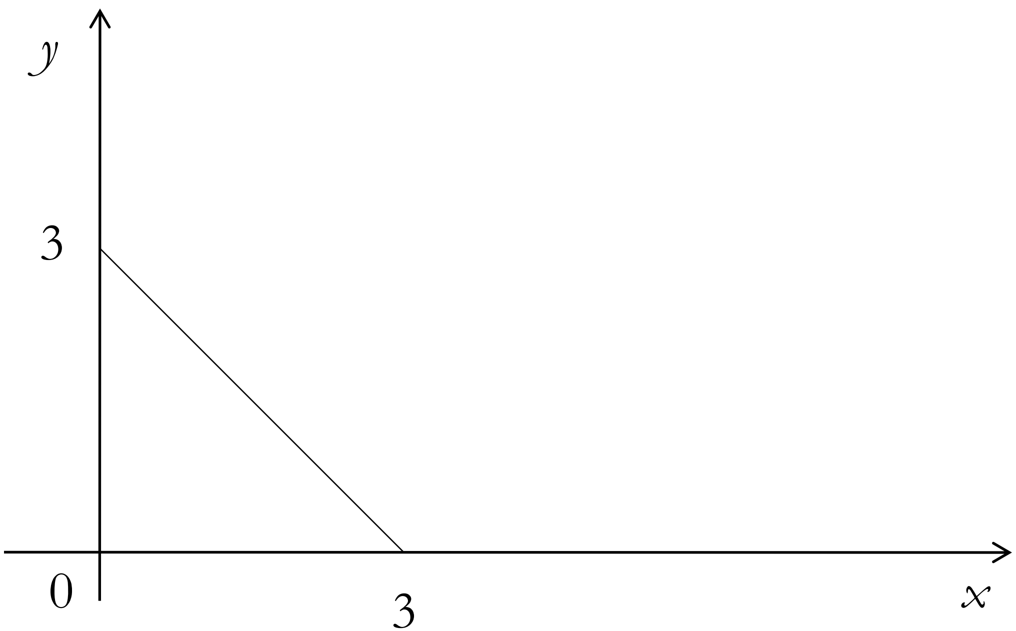
a. $y = 6x + 10$

- Intercetta verticale $q = 10$
- Intercetta orizzontale $-q/m = -10/6$
- $m > 0$ funzione crescente



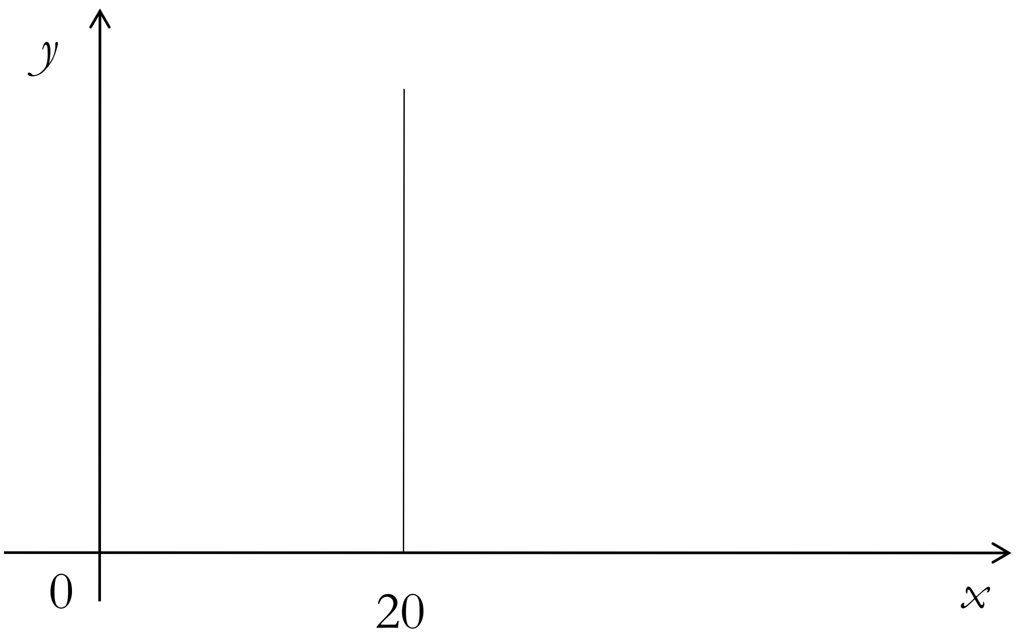
b. $3x + 3y - 9 = 0 \Rightarrow 3y = 9 - 3x \Rightarrow y = 3 - x$

- Intercetta verticale $q = 3$
- Intercetta orizzontale $-q/m = 3$
- $m < 0$ funzione decrescente



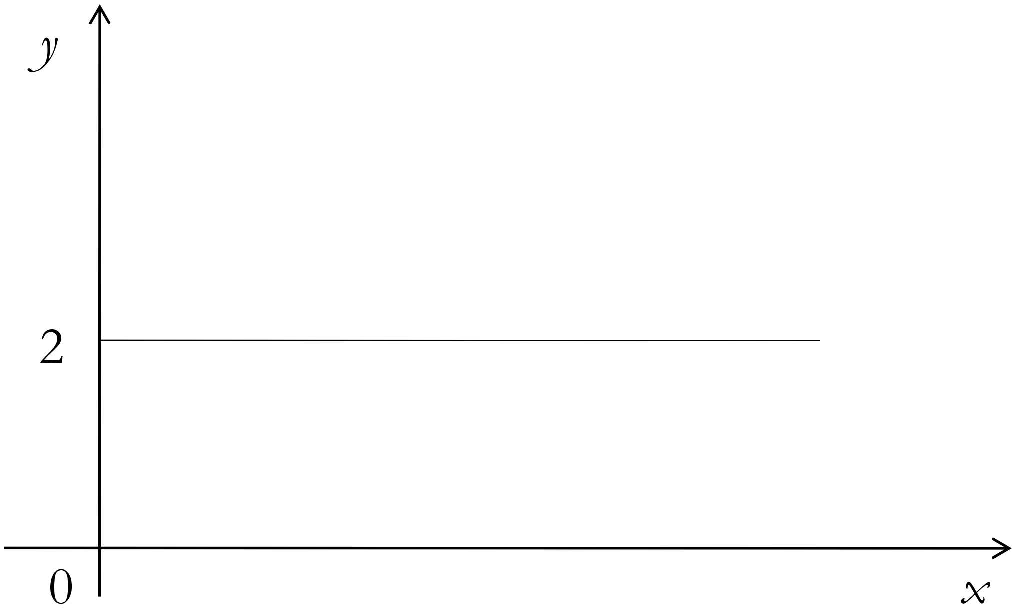
c. $x = 20$

- Intercetta verticale = non esiste
- Intercetta orizzontale = 20
- funzione costante



d. $y = 2$

- Intercetta verticale = 2
- Intercetta orizzontale = non esiste
- funzione costante



ESERCIZIO 2

Risolvere i seguenti sistemi di due equazioni in due incognite:

a. $$\begin{cases} \dfrac{y}{x} = \dfrac{1}{2} \\ x + 2y = 400 \end{cases}$$

b. $$\begin{cases} \dfrac{1}{4\sqrt{x}} = \dfrac{1}{2} \\ 4x + 8y = 81 \end{cases}$$

c. $$\begin{cases} 11 = x + 2\sqrt{y} \\ \sqrt{y} = \dfrac{5}{2} \end{cases}$$

a.

$$\begin{cases} \dfrac{y}{x} = \dfrac{1}{2} \\ x + 2y = 400 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = \dfrac{1}{2}x \\ x + 2\left(\dfrac{1}{2}x\right) = 400 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = \dfrac{1}{2}x \\ x + x = 400 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 100 \\ x = 200 \end{cases}$$

b.

$$\begin{cases} \dfrac{1}{4\sqrt{x}} = \dfrac{1}{2} \\ 4x + 8y = 81 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4\sqrt{x} \cdot \dfrac{1}{4\sqrt{x}} = \dfrac{1}{2} \cdot 4\sqrt{x} \\ .... \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 = \dfrac{4\sqrt{x}}{2} \\ ... \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2\sqrt{x} = 1 \\ ... \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4x = 1 \\ ... \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{1}{4} \\ 4 \cdot \dfrac{1}{4} + 8y = 81 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ... \\ 8y = 81 - 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{1}{4} \\ y = 10 \end{cases}$$

c.

$$\begin{cases} 11 = x + 2\sqrt{y} \\ \sqrt{y} = \dfrac{5}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 11 = x + 2 \cdot \dfrac{5}{2} \\ \sqrt{y} = \dfrac{5}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 11 = x + 5 \\ y = \dfrac{25}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 6 \\ y = \dfrac{25}{4} \end{cases}$$

IL RAPPORTO INCREMENTALE

Data la funzione $y = f(x)$ il rapporto incrementale si definisce :

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

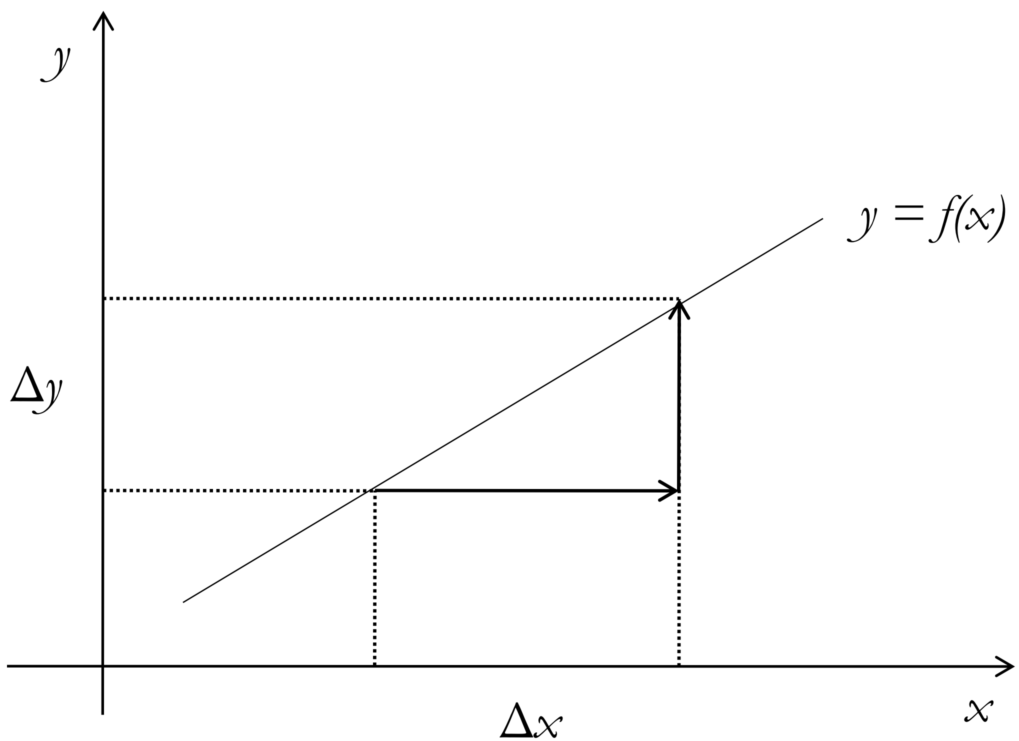
Il rapporto incrementale di una funzione definisce la variazione della variabile dipendente quando varia la variabile indipendente.

In una retta il rapporto incrementale misura la pendenza della retta stessa.

IL RAPPORTO INCREMENTALE

Data la funzione $y = f(x)$ il rapporto incrementale si definisce :

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$



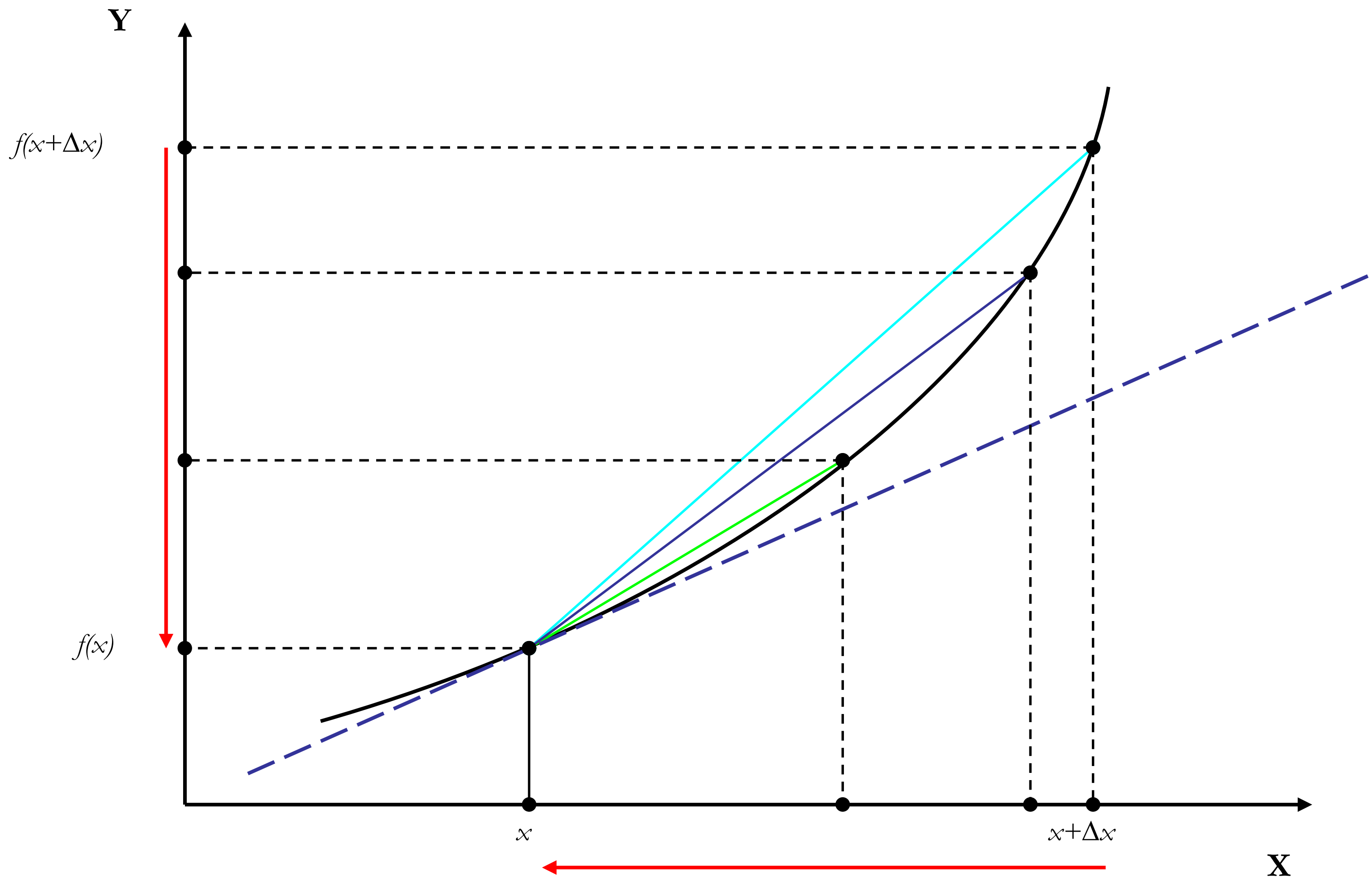
LE DERIVATE

La derivata è il limite per $\Delta x \to 0$ del rapporto incrementale della $f(x)$ in un punto, se questo limite esiste ed è finito:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

La derivata è il limite per $\Delta x \to 0$ del coefficiente angolare di una retta tangente in un punto dato.

LE DERIVATE



LE DERIVATE

Data la funzione $y = f(x)$, la sua derivata prima si può indicare in diversi modi:

$$f'(x) \qquad Df(x)$$

$$y' \qquad \frac{d}{dx} f(x)$$

$$\frac{dy}{dx}$$

Le derivate
Principali regole di derivazione.

Derivata di una costante

$$y = k \quad \Rightarrow \quad y' = 0$$

Derivata della variabile indipendente

$$y = x \quad \Rightarrow \quad y' = 1$$

Derivata di una potenza

$$y = x^n \quad \Rightarrow \quad y' = n \cdot x^{n-1}$$

Le derivate
Principali regole di derivazione - esempi

Derivata di una costante

$y = 3$ ⇨ $y' = 0$

Derivata della variabile indipendente

$y = x$ ⇨ $y' = 1$

Derivata di una potenza

$y = x^2$ ⇨ $y' = 2 \cdot x^{2-1}$ ⇨ $y' = 2x$

Le derivate
Principali regole di derivazione - esempi

N.B.

Funzioni assimilabili a $y = x^n$:

$$y = \frac{1}{x} \quad \Rightarrow \quad y = x^{-1}$$

$$y' = -1 \cdot x^{-1-1} = -1 \cdot x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$$

$$y = \sqrt{x} \quad \Rightarrow \quad y = x^{\frac{1}{2}}$$

$$y' = \frac{1}{2} \cdot x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2} \cdot x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Le derivate
Principali regole di derivazione.

Derivata di un logaritmo naturale

$$y = \ln x \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{1}{x}$$

Derivata di un'esponenziale

$$y = e^x \quad \Rightarrow \quad y' = e^x$$

Derivata di un' esponenziale

$$y = a^x \quad \Rightarrow \quad y' = a^x \cdot \ln a$$

Le derivate
Principali regole di derivazione.

Derivata di una funzione

$$y = g\left[f\left(x\right)\right]$$

$$y' = g'\left[f\left(x\right)\right] \cdot f'\left(x\right)$$

Esempio:

$$y = \log\left(x^2\right)$$

$$y' = \frac{1}{x^2} \cdot 2x$$

Le derivate
Principali regole di derivazione.

$$y = k \cdot f(x)$$

$$y' = k \cdot f'(x)$$

$$y = f(x) \pm g(x)$$

$$y' = f'(x) \pm g'(x)$$

$$y = f(x) \cdot g(x)$$

$$y' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

Le derivate
Principali regole di derivazione - esempi

$$y = 3x$$

$$y' = 3$$

$$y = 3x^2$$

$$y' = 3 \cdot 2x^{2-1} = 6x$$

$$y = 4x + x^3$$

$$y' = 4 + 3 \cdot x^2$$

$$y = \log(x) \cdot e^x$$

$$y' = \frac{1}{x} \cdot e^x + \log(x) \cdot e^x$$

Le derivate.
Principali regole di derivazione.

$$y = \frac{f(x)}{g(x)}$$

$$y' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{\left[g(x)\right]^2}$$

$$y = \frac{1}{f(x)}$$

$$y' = -\frac{f'(x)}{\left[f(x)\right]^2}$$

Le derivate.
Principali regole di derivazione - esempi

$$y = \frac{5x}{4x+1}$$

$$y' = \frac{5\cdot(4x+1) - 5x\cdot 4}{[4x+1]^2} = \frac{20x+5-20x}{[4x+1]^2} = \frac{5}{[4x+1]^2}$$

$$y = \frac{1}{4x}$$

$$y' = -\frac{4}{[4x]^2} = -\frac{4}{16x^2} = -\frac{1}{4x^2}$$

ESERCIZIO 3.

Calcolare le derivate prime delle seguenti funzioni:

a. $y = -\frac{40}{3}x$ $\quad\quad$ $y' = -\frac{40}{3}$

b. $y = \frac{5}{3}x + 6$ $\quad\quad$ $y' = \frac{5}{3}$

c. $y = 2x^3 + 6$ $\quad\quad$ $y' = 2 \cdot 3x^2 = 6x^2$

d. $y = 3x^2 + 5x + 11$ $\quad y' = 3 \cdot 2x + 5 = 6x + 5$

e. $y = x^2 - 12x + 10$ $\quad y' = 2x - 12$

f. $y = 10x - x^2$ $\quad y' = 10 - 2x$

g. $y = \log(2x)$ $\quad y' = \dfrac{1}{2x} \cdot 2 = \dfrac{1}{x}$

h. $y = 2\log(x)$ $\qquad y' = \dfrac{2}{x}$

i. $y = e^{5-x^2}$ $\qquad y' = e^{5-x^2} \cdot (-2x)$

j. $y = \dfrac{1}{x^6}$ $\qquad y' = -6 \cdot x^{-6-1} = -\dfrac{6}{x^7}$

k. $y = \dfrac{2+x}{3x}$ $\qquad y' = \dfrac{1 \cdot 3x - (2+x) \cdot 3}{(3x)^2} = -\dfrac{6}{9x^2} = -\dfrac{2}{3x^2}$

l. $y = \dfrac{x^2}{x-1}$ $\qquad y' = \dfrac{2x \cdot (x-1) - x^2 \cdot 1}{(x-1)^2} = \dfrac{x^2 - 2x}{(x-1)^2}$

LE DERIVATE PARZIALI

Quando abbiamo una funzione a più variabili indipendenti del tipo

$$y = f\left(x_1, \ldots, x_n\right)$$

possiamo isolare l'effetto esercitato da ciascuna variabile sulla *y* attraverso il calcolo delle derivate parziali.

Nel calcolo delle derivate parziali, quando si deriva rispetto ad una variabile, l'altra variabile (o le altre variabili) vanno considerate come grandezze costanti.

LE DERIVATE PARZIALI

Esempio.

Data la funzione $z = 2x + y^2$

derivata parziale rispetto a x $\dfrac{\partial z}{\partial x} = 2$

derivata parziale rispetto a y $\dfrac{\partial z}{\partial y} = 2y$

ESERCIZIO 4.

Calcolare le derivate parziali delle seguenti funzioni:

a.

$$z = x + y \qquad \frac{\partial z}{\partial x} = 1 \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = 1$$

b.

$$y = 2x_1^3 + \frac{1}{4}x_2^2 \qquad \frac{\partial z}{\partial x_1} = 6x_1^2 \qquad \frac{\partial z}{\partial x_2} = \frac{1}{2}x_2$$

c.

$$z = 5\sqrt{x} + y \qquad \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{5}{2\sqrt{x}} \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = 1$$

d. $z = y\log(x)$ $\qquad \dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{y}{x}$ $\qquad \dfrac{\partial z}{\partial y} = \log(x)$

e. $z = x^{\alpha} + y^{\beta}$ $\qquad \dfrac{\partial z}{\partial x} = \alpha x^{\alpha-1}$ $\qquad \dfrac{\partial z}{\partial y} = \beta y^{\beta-1}$

f. $z = x^3 y$ $\qquad \dfrac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 \mathrm{y}$ $\qquad \dfrac{\partial z}{\partial y} = x^3$

g. $z = x^3(y-1)$ $\qquad \dfrac{\partial z}{\partial x} = 3x^2(y\text{ -}1)$ $\qquad \dfrac{\partial z}{\partial y} = x^3$

LE DERIVATE SECONDE

Quando abbiamo una funzione la cui derivata è a sua volta una funzione, è possibile calcolare la derivata della derivata, ossia la derivata seconda.

Per il calcolo della derivata seconda si applicano le stesse regole della derivata prima.

Le notazioni per la derivata seconda sono:

$$f''(x) \qquad y'' \qquad \frac{d^2y}{dx^2}$$

LE DERIVATE SECONDE

Esempio.

Data la funzione $y = 2x^3$

La sua derivata prima è $y' = 6x^2$

La sua derivata seconda è $y'' = 12x$

ESERCIZIO 5.

Calcolare le derivate seconde delle seguenti funzioni:

a. $y = 2x^3 + \frac{1}{4}x^2$

$$y' = 6x^2 + \frac{1}{2}x \qquad y'' = 12x + \frac{1}{2}$$

b. $y = 5x - 2$

$$y' = 5 \qquad y'' = 0$$

c. $$y = \frac{1}{3}x^3 + x^2 + x$$

$$y' = x^2 + 2x + 1 \qquad\qquad y'' = 2x + 2$$

d. $$y = \frac{4x^2 + 1}{3x}$$

$$y' = \frac{8x \cdot 3x - 3\left(4x^2 + 1\right)}{9x^2} = \frac{24x^2 - 12x^2 - 3}{9x^2} = \frac{12x^2 - 3}{9x^2}$$

$$y'' = \frac{24x \cdot 9x^2 - \left(12x^2 - 3\right) \cdot 18x}{81x^4}$$

$$y'' = \frac{216x^3 - 216x^3 + 54x}{81x^4} = \frac{2}{3x^3}$$